Subject: معادلات دیفرانسیل
Year. Month. Date. (1)

جلسه اول

فصل اول: مفاهیم مقدماتی

فصل دوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه اول

فصل سوم: معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم و بالاتر

فصل چهارم: تبدیلات لاپلاس و کاربردهای آن

فصل پنجم: حل معادله به کمک سری های توانی

فصل اول

معادله دیفرانسیل: معادله‌ای است که جواب آن تابع باشد. حداقل یکی از مشتقات تابع باید در معادله باشد.

$e = 2.718$

جواب‌های معادلات:
- جواب عمومی y_G
- جواب خصوصی y_p
- جواب استثنایی

Subject:

Year. Month. Date.

مرتبه ← بزرگترین مشتق
درجه ← توان مشتق

تمرین: مرتبه و درجه معادلات زیر را بنویسید.

$xy'' - y' + \sin y = 0$ مرتبه دوم، درجه اول

$y'''^{3} + \frac{1}{x}y' + y = 0$ مرتبه سوم، درجه سوم

$y^{(4)} - y'''^{7} + x^{2}y' + y = 0$ مرتبه چهارم، درجه اول

$y' + 4y = \sin x$ مرتبه اول، درجه اول

$(xy' - 2y)^{2} = x^{3}y'$ مرتبه اول، درجه دوم

$(1 + y'^{2})^{3} = y''^{2}$ مرتبه دوم، درجه دوم

$\ln y' = 2xy$ مرتبه اول، درجه اول

$y'' = \sqrt{1 + y'^{4}}$ مرتبه دوم، درجه اول

$e^{y} = xy''$ مرتبه دوم، درجه اول

تمرین: نشان دهید $\ln y + \frac{x}{y} = c$ جواب معادله زیر است.

$(y - x)y' + y = 0$

مشتق نسبت به x

$\frac{y'}{y} + \frac{y - y'x}{y^{2}} = 0$

$yy' + y - y'x = 0$

$\boxed{y' = \frac{-y}{y - x}}$

$\Rightarrow (y - x)\cdot\frac{-y}{y - x} + y = 0$

$\Rightarrow -y + y = 0$ ✓

فرم کلی معادلات دیفرانسیل:

$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

معادلات:
- معادلات دیفرانسیل معمولی: ordinary differential equations
- معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی: Partial differential equations

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین: نشان دهید توابع داده شده جواب‌هایی برای معادلات دیفرانسیل متناظر می‌باشند.

$y'' + y = 0 \; ; \; (y = \sin x)$

$y'' + 25y = 0 \; ; \; (y = a\sin 5x + b\cos 5x)$

$y'' - y = 0 \; ; \; (y = e^{x})$

$xy' + y = \cos x \; ; \; \left(y = \frac{\sin x}{x}\right)$

$(xy - x)y'' + x(y'^2) + yy' - 2y' = 0 \; ; \; (y = \ln xy)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حالت کلی معادله دیفرانسیل : $f(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

مرتبه ← بزرگترین مشتق y در معادله ، درجه ← بزرگترین توان مرتبه

جواب های معادلات دیفرانسیل
- عمومی
- خصوصی
- استثنائی

۱ـ معادلات دیفرانسیل مرتبه اول :

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \\ f(x,y,y') = 0 \end{array}\right\}$$ هر دو یکی است

الف) جدایی پذیر . $y' = F(x,y)$, $y' = f(x)\,g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} = f(x)\,g(y)$

$$\Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = f(x).\,dx \Rightarrow$$ انتگرال بگیری

مثال:

$$y' = -\frac{y}{x} \qquad \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \qquad dy.\,x = -y.\,dx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|y| = -\ln|x| + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \ln\left|\frac{c}{x}\right|$$

$$\Rightarrow e^{\ln|y|} = e^{\ln\left|\frac{c}{x}\right|} \Rightarrow |y| = \left|\frac{c}{x}\right| \Rightarrow y = \frac{c}{x}$$

$$\frac{(3e^x \operatorname{tg} y)\,dx + (2-e^x)\sec^2 y\,dy = 0}{\operatorname{tg} y.\,(2-e^x)} \Rightarrow \overbrace{\frac{3e^x\,dx}{2-e^x}}^{\mathrm{I})} + \overbrace{\frac{\sec^2 y\,dy}{\operatorname{tg} y}}^{\mathrm{II})} = 0$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2-e^x = u \\ -e^x dx = du \end{array}\right. \Rightarrow 3\int \frac{e^x dx}{2-e^x} = 3\int \frac{-du}{u} = -3\ln|u| = -3\ln|2-e^x| \quad \mathrm{I}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \operatorname{tg} y = v \\ dv = \sec^2 y\,dy \end{array}\right. \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \ln|v| = \ln|\operatorname{tg} y| \quad \mathrm{II})$$

Subject:

Year.　Month.　Date.　( )

$$\Rightarrow -3\ln|2-e^x| + \ln|tg\,y| = \ln c \Rightarrow \ln|tg\,y| = \ln|2-e^x|^3 + \ln c$$

$$\Rightarrow \ln|tg\,y| = \ln\left(|2-e^x|^3 . c\right) \Rightarrow e^{\ln|tg\,y|} = e^{\ln\left(|2-e^x|^3 . c\right)}$$

$$\Rightarrow tg\,y = (2-e^x)^3 . c \Rightarrow y = Arctg\left((2-e^x)^3 . c\right)$$

تمرین: معادله دیفرانسیل ← $yy' = e^x(1+y)$ را با شرط اولیه $y_0 = 1$ حل کنید.

$$yy' = e^x(1+y) \Rightarrow \frac{yy'}{1+y} = e^x \Rightarrow \frac{y\frac{dy}{dx}}{1+y} = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{y\,dy}{1+y} = e^x dx \Rightarrow \int \frac{y\,dy}{1+y} = \int e^x dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{y}{1+y} dy = \int \frac{y+1-1}{1+y} dy = \int \left(1 - \frac{1}{1+y}\right) dy = y - \ln|1+y|$$

$$\Rightarrow \boxed{y - \ln|1+y| = e^x + c}$$ جواب عمومی

⚠ چنین جوابی عمومی است چون که جواب ما ([illegible]) [illegible]

$x=0, y=1$: $1 - \ln|1+1| = e^0 + c \Rightarrow 1 - \ln 2 = 1 + c \Rightarrow C = -\ln 2$

$$\Rightarrow y - \ln|1+y| = e^x - \ln 2$$ جواب خصوصی

Subject:
Year. Month. Date.

ب) معادلاتی که قابل تبدیل به جدایی پذیر می باشند : $y' = f(ax+by+c)$

$x-y-1=t \Rightarrow 1-y' = \frac{dt}{dx} \Rightarrow y' = 1-\frac{dt}{dx}$ (II)

مثال: $y' = 1+\frac{1}{x-y-1} \Rightarrow y' = 1+\frac{1}{t}$ (I)

$\xrightarrow{2,1} -\frac{dt}{dx} = \frac{1}{t} \Rightarrow dx = -t\,dt \Rightarrow \int dx = \int -t\,dt$

$\Rightarrow -\frac{1}{2} t^2 = x+c \Rightarrow -\frac{1}{2}(x-y-1)^2 = x+c$ جواب عمومی

۱- معادلات دیفرانسیل همگن :

$\underset{M(x,y)}{y^2}\,dx + \underbrace{(x^2+y^2)}_{N(x,y)}\,dy = 0$

$(\lambda y)^2 = \lambda^2 y^2 = \lambda^2 M$ همگن از درجه دوم

$[(\lambda x)^2 + (\lambda y)^2] = \lambda^2(x^2+y^2) = \lambda^2 N$ همگن از درجه دوم

⚠ معادله ای همگن است که M و N همگن از یک درجه باشند.

حل: $y = vx \Rightarrow dy = x\,dv + v\,dx$ و $v = \frac{y}{x}$ داریم

$v^2x^2\,dx + (x^2+v^2x^2)(x\,dv + v\,dx) = 0$

$v^2x^2\,dx + x^3\,dv + x^2v\,dx + v^2x^3\,dv + v^3x^2\,dx = 0$

$dx(v^2x^2 + x^2v + v^3x^2) + dv(x^3 + v^2x^3) \Rightarrow x^2(v^2+v+v^3)\,dx + x^3(1+v^2)\,dv = 0$

$\frac{x^2}{x^3}dx + \frac{1+v^2}{v^3+v^2+v}dv = 0 \Rightarrow \frac{1+v^2}{v(v^2+v+1)} = \frac{A}{v} + \frac{Bv+C}{v^2+v+1}$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین : جواب عمومی معادلات زیر را بیابید.

1) $y' = x + y - 1$

۲) $y' = (y - 4x)^2$

۳) $y' = \cos(x + y - 2)$

۴) $y' = (4x + y + 1)^2$

۵) $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

۶) $y = e^{y/x} + y/x$

Subject [redacted]
Year [redacted] Month. Date. / /

معادلات کامل:

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

۱- دیفرانسیل یک تابع چند متغیره:

$$\mu(x,y) = x^2y^2 - \sin x + e^y \ln x$$

$$d\mu = \left(2xy^2 - \cos x + \frac{1}{x}e^y\right)dx + \left(2x^2y - 0 + e^y\ln x\right)dy$$

$$d\mu = \mu_x\,dx + \mu_y\,dy$$

۲- مشتقات جزئی:

$$M(x,y) = x^2 + xy - y^2$$

$$\frac{\partial M}{\partial x} = M_x = 2x + y \quad , \quad \frac{\partial M}{\partial y} = M_y = x - 2y$$

حل معادلات کامل:

$$d\mu = \mu_x\,dx + \mu_y\,dy = M\,dx + N\,dy = 0$$

$\boxed{\mu = C}$ جواب عمومی $\quad \mu_x = M \Rightarrow \boxed{\mu = \int M\,dx + g(y)}$

$$\Rightarrow \mu_y = N = \frac{d}{dy}\left(\int M\,dx\right) + \left(g'(y)\right)$$

مثال:

$$\underbrace{2x}_{M}\,dx + \underbrace{2y}_{N}\,dy = 0$$

$$\Rightarrow \mu = \int 2x\,dx = x^2 + g(y)$$

مشتق

$$\Rightarrow \mu_y = 2y = g'(y) \Rightarrow g(y) = \int 2y\,dy = y^2 + c_1$$

$$\Rightarrow \mu = x^2 + y^2 + c_1 = c_2$$

$$\Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = \overbrace{c_2 - c_1}^{C}}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

قضیه: فرض کنید توابع M ، N ، M_y ، N_x در ناحیه R به طوری که

$R=\{(x,y)|a<x<b, c<y<d\}$ (داخل یک مستطیل) موجود و پیوسته باشند، در این صورت

معادله $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ در ناحیه R کامل است اگر و تنها اگر

در هر نقطه از R داشته باشیم:

$$\boxed{M_y=N_x \quad \text{یا} \quad \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}}$$

مثال: نشان دهید که معادله دیفرانسیل زیر کامل است سپس جواب عمومی آن را بیابید.

$$(\underbrace{\sin y+2yx}_{M})dx+(\underbrace{x\cos y+x^2}_{N})dy=0$$

$$M_y \overset{?}{=} N_x \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y}\overset{?}{=}\frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(\sin y+2yx)=\cos y+2x \\ \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y+x^2)=\cos y+2x \end{cases}$$

چون تابع دو متغیره است نسبت به x انتگرال می‌گیریم پس مقدار ثابتی که بوجود می‌آید تابعی برحسب y است

معادله کامل است $\Leftarrow M_y=N_x \Leftarrow$

$$M=\int(\sin y+2yx)dx=x\sin y+x^2y+g(y)$$

$$\overset{M_y=N}{\Longrightarrow} M_y=x\cos y+x^2=x\cos y+x^2+g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y)=0 \Rightarrow g(y)=\int 0\,dy=C_1$$

$$M(x,y)=x\sin y+x^2y+C_1=C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{x\sin y+x^2y=C}$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

تمرین : جواب عمومی معادلاتی که کامل می‌باشند را بیابید.

① $(y^2+2x)dx + 2xy\,dy = 0$ ② $(x+y)dx + (x-y)dy = 0$

③ $(2x+e^y)dx + (x\,e^y)dy = 0$ ④ $(x\ln y + xy)dx + (y\ln x + xy)dy = 0$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: نشان دهید معادله زیر کامل است و سپس جواب عمومی آن را پیدا کنید.

$$\underbrace{(e^x\sin y - 2y\sin x)}_{M}dx + \underbrace{(e^x\cos y + 2\cos x)}_{N}dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} \overset{?}{=} \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = e^x\cos y - 2\sin x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = e^x\cos y - 2\sin x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$ معادله کامل است

$$\mu = \int (e^x\sin y - 2y\sin x)dx = e^x\sin y + 2y\cos x + g(y)$$

$\mu_y = N$ و از طرفین μ نسبت به y مشتق می‌گیریم

$$\xrightarrow{\mu_y = N} e^x\cos y + 2\cos x = e^x\cos y + 2\cos x + g'(y)$$

$$\Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = \int 0\,dy = C_1 \Rightarrow \mu = e^x\sin y + 2y\cos x + C_1 = C_2$$

$$\Rightarrow \boxed{e^x\sin y + 2y\cos x = C}$$

مثال:

$$\underbrace{(\sin y + 2yx)}_{M}dx + \underbrace{(x\cos y + x^2)}_{N}dy = 0$$

$$\mu = \int(\sin y + 2yx)dx = x\sin y + yx^2 + g(y)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial M}{\partial y} = \cos y + 2x \\ \frac{\partial N}{\partial x} = \cos y + 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow$$ معادله کامل است

$$\Rightarrow \mu_y = x\cos y + x^2 = x\cos y + x^2 + g'(y) \Rightarrow g(y) = \int 0\,dy = C_1$$

$$\Rightarrow \mu = x\sin y + yx^2 + C_1 = C_2 \Rightarrow \boxed{x\sin y + yx^2 = C}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

⚠ در بعضی از موارد معادله $Mdx+Ndy=0$ کامل نیست ولی با ضرب در یک عبارت تبدیل به معادله کامل می‌شود. به این عبارت عامل انتگرال ساز (فاکتور انتگرال) می‌گوییم.

* حالت اول: فاکتور انتگرال تابعی از x است.

$$\frac{M_y-N_x}{N}=f(x) \Longrightarrow \boxed{\text{فاکتور انتگرال}=e^{\int f(x)\,dx}}$$

مثال: آیا معادله زیر کامل است؟ اگر نیست فاکتور انتگرال را پیدا کنید و جواب معادله را بیابید.

$$(x^3+\tfrac{1}{3}y^3)\,dx-(xy^2)\,dy=0$$

$\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}\Rightarrow$ معادله کامل نیست

$$\begin{cases}M_y=y^2\\ N_x=-y^2\end{cases}\Rightarrow\frac{M_y-N_x}{N}=\frac{y^2-(-y^2)}{-xy^2}=\frac{-2}{x}=f(x)$$

$$\text{فاکتور انتگرال}=e^{\int f(x)dx}=e^{-2\int\frac{1}{x}dx}=e^{-2\ln|x|}=e^{\ln|x|^{-2}}=|x|^{-2}=\frac{1}{x^2}$$

$\Rightarrow (x+\frac{y^3}{3x^2})\,dx-\frac{y^2}{x}\,dy=0$ معادله تبدیل به معادله کامل شد

$$\Rightarrow f=\int(x+\frac{y^3}{3x^2})\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3x}+g(y)\ \Big/\ M_y=\frac{-y^2}{x}=\frac{-y^2}{x}+g'(y)\Rightarrow g(y)=c$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{y^3}{3x}=c$$

⚠ وقتی M_y-N_x را تشکیل می‌دهیم یا بر N و یا بر M باید تقسیم شود هر کدام که باعث شود حاصل یک متغیره باشد بر آن تقسیم می‌کنیم. اگر N بود فاکتور انتگرال برحسب x خواهد بود و اگر M بود فاکتور انتگرال برحسب y خواهد بود.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

* حالت دوم: عامل انتگرال ساز تابعی از y است.

$$\frac{M_y - N_x}{M} = g(y) \Rightarrow \boxed{\text{فاکتور انتگرال} = e^{-\int g(y)\,dy}}$$

مثال: عامل انتگرال ساز معادله دیفرانسیل زیر را بیابید، سپس جواب عمومی آن را بدست آورید.

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0 \quad \begin{cases} M_y = \frac{1}{x} \\ N_x = \frac{-1}{x} \end{cases} \Rightarrow \text{معادله کامل نیست}$$

$$\frac{M_y - N_x}{M} = \frac{\frac{1}{x} - (-\frac{1}{x})}{\frac{y}{x}} = \frac{2}{y} \Rightarrow \text{فاکتور انتگرال} = e^{-\int \frac{2}{y}dy} = e^{-2\ln|y|} = e^{\ln|y|^{-2}} = \frac{1}{y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{yx}dx + \left(y - \frac{\ln x}{y^2}\right)dy = 0$$

* حالت سوم: عامل انتگرال ساز به صورت $x^\alpha y^\beta$ باشد (در صورت مسئله ذکر می‌شود)

تمرین: اگر $\mu = x^\alpha y^\beta$ عامل انتگرال ساز معادله $(xy - 2y^2)dx + (3xy - x^2)dy = 0$ باشد ابتدا α و β را بیابید و سپس معادله را حل کنید.

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین: برای معادلات زیر در صورت امکان یک عامل انتگرال ساز بیابید، سپس معادله را حل کنید.
و در صورت کامل بودن حل کنید.

① $(x+2y)dx + x\,dy = 0$ ② $(x+3y)dx + x\,dy = 0$

③ $2y^2\,dx + (2x + 3xy)\,dy = 0$ ④ $(x^2+y^2+x)dx + (y\,dy) = 0$

⑤ $\left(3x + \frac{4}{y}\right)dx + \left(\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x}\right)dy = 0$ ⑥ $(2x+e^y)dx + xe^y\,dy = 0$

⑦ $\cosh x \cos y\,dx - \sinh x \sin y\,dy = 0$

⑧ $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$

⑨ $(\sin xy + xy\cos xy)\,dx + x^2\cos xy\,dy = 0$

Subject: [redacted]
Year: [redacted] Date: 2 [redacted]

معادلات خطی (مرتبه اول):

حالت اول:

$$y' + P(x)y = q(x)$$

⚠ نکته: اگر $q(x)=0$ (صفر) باشد معادله خطی همگن می‌شود

$$y' + P(x)y = 0 \Rightarrow y' = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -P(x)dx \Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|c|$$

$$\Rightarrow \ln\left|\frac{y}{c}\right| = -\int P(x)dx \Rightarrow e^{\ln\left|\frac{y}{c}\right|} = e^{-\int P(x)dx}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = Ce^{-\int P(x)dx}}$$ جواب معادله خطی همگن مرتبه اول

مثال: $y' - \frac{y}{x} = 0 \quad P(x) = \frac{-1}{x}$

اگر قدر مطلق نبود هیچ فرقی نمی‌کند ... C هر عددی می‌تواند باشد

$$y = Ce^{-\int \frac{-1}{x}dx} = Ce^{\int \frac{1}{x}dx} = Ce^{\ln|x|} = C|x| = Cx$$

$$y' - y\,tg\,x = 0 \quad P(x) = -tg\,x$$

$$y = Ce^{-\int -tg\,x\,dx} = Ce^{\int tg\,x\,dx} = Ce^{-\ln|\cos x|} = Ce^{\ln|\cos x|^{-1}}$$

$$= \frac{C}{\cos x} = C\sec x$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

معادلات خطی غیرهمگن :

روش اول : تغییر پارامتر

ابتدا معادله خطی غیرهمگن را همگن می‌کنیم یعنی $q(x)=0$ و سپس حل می‌کنیم و بعد از جواب بدست آمده مشتق می‌گیریم (به طوری که c را دیگر عدد ثابت در نظر نمی‌گیریم) سپس y' و y بدست آمده را در معادله اولیه قرار می‌دهیم. در نهایت c بدست آمده را در y که بدست آوردیم قرار می‌دهیم.

مثال : $y' - y\,tgx = \cos x \Rightarrow y' - y\,tgx = 0$

$$\Rightarrow y = Ce^{-\int -tgx\,dx} = Ce^{-\ln|\cos x|} = c|\cos x|^{-1} = c\sec x$$

$$\Rightarrow y' = c'\sec x + c\sec x \cdot tgx \Longrightarrow$$ جایگذاری می‌کنیم

$$c'\sec x + c\sec x\,tgx - c\sec x\,tgx = \cos x$$

$$c'\frac{1}{\cos x} = \cos x \Rightarrow \frac{dc}{dx} = \cos^2 x \Rightarrow \int dc = \int \cos^2 x\,dx$$

$$\Rightarrow c = \int\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos 2x}{2}\right)dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x\right)\sec x}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

مثال: $\underbrace{y' - y\,\boxed{tgx}}_{p(x)} = \underbrace{\cos x}_{q(x)}$ $\qquad y = e^{-\int -tgx\,dx}\left[\int \cos x\, e^{\int -tgx\,dx}\,dx + c\right]$

$$y = \underbrace{e^{-\ln|\cos x|}}_{e^{\ln|\cos x|^{-1}}}\left[\int \cos x\, e^{\ln|\cos x|}\,dx + c\right]$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{\cos x}\left[\int \underbrace{\cos^2 x}_{\frac{1+\cos 2x}{2}}\,dx + c\right] = \frac{1}{\cos x}\left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c\right]$$ جواب عمومی

معادلات برنولی: $y' + p(x)\,y = q(x)\,y^n$

$$\xrightarrow{\times y^{-n}} y'y^{-n} + p(x)\,y^{1-n} = q(x) \xrightarrow[\text{مشتق نسبت به } x]{y^{1-n}=u} (1-n)y'y^{-n} = u'$$

$$\frac{1}{1-n}u' + p(x)u = q(x) \Rightarrow u' + (1-n)p(x)u = (1-n)q(x)$$

مثال: $y' + \frac{2}{x}y = 2\sqrt{y}\,x$ $\quad y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow n = \frac{1}{2}$

$$\xrightarrow{\times y^{-\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}y' + \frac{2}{x}y^{\frac{1}{2}} = 2x \quad , \quad y^{\frac{1}{2}} = u \Rightarrow \frac{1}{2}y'y^{-\frac{1}{2}} = u'$$

$$\Rightarrow 2u' + \frac{2}{x}u = 2x \Rightarrow u' + \frac{1}{x}u = x \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{x} \\ q(x) = x \end{cases}$$

$$u = e^{-\int \frac{1}{x}dx}\left[\int x e^{\int \frac{1}{x}dx}\,dx + c\right] = e^{\ln|x|^{-1}}\left[\int x e^{\ln|x|}\,dx + c\right] = \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3} + c\right)$$

$$\Rightarrow u = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \xrightarrow{u=y^{\frac{1}{2}}} y^{\frac{1}{2}} = \frac{x^2}{3} + \frac{c}{x} \Rightarrow y = \left(\frac{x^2}{3} + \frac{c}{x}\right)^2$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $y' - \frac{y}{x} = x \Rightarrow y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow y = cx \Leftarrow$ قبل تر همگن آن را حل کرده ایم

$\xrightarrow{\text{مشتق به حسب } x} y' = c'x + c \xrightarrow{\text{جایگذاری}} c'x + c - \frac{cx}{x} = x$

$\Rightarrow c'x = x \Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c = x + c_1 \rightarrow$ c بدست آمده را در جواب حالت همگن قرار می دهیم

$$\boxed{y = (x + c_1)x}$$

نوع سوم :

$$y' + P(x)y = \varphi(x)$$

جواب عمومی: $y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int q(x) e^{\int P(x)dx} dx + C\right]$

جواب عمومی خطی غیرهمگن مرتبه اول

Subject:
Year. Month. Date. ( )

سؤال امتحانی ترم قبل :

$$xy' + y = 2x^2 y^3 \to y^n \Rightarrow n=3$$

$$\xrightarrow{\times y^{-3}} xy'y^{-3} + \underbrace{yy^{-3}}_{y^{-2}} = 2x^2 \Rightarrow u = y^{-2} \Rightarrow u' = -2y'y^{-3} = \boxed{-2y^{-3}}$$

$$\xrightarrow{\div x} y'y^{-3} + \frac{1}{x}y^{-2} = 2x \Rightarrow -\frac{1}{2}u' + \frac{1}{x}u = 2x \xrightarrow{\times -2} u' - \frac{2}{x}u = -4x$$

$$\Rightarrow u = e^{-\int \frac{-2}{x}dx}\left[\int -4x e^{\int \frac{-2}{x}dx} dx + c\right] = e^{2\ln|x|}\left[\int -4x e^{-2\ln|x|} dx + c\right]$$

$$= x^2\left[\int -4x \cdot x^{-2} dx + c\right] = x^2 \int \frac{-4}{x} dx + c = x^2\cdot(-4\ln|x| + c)$$

$$\Rightarrow u = x^2(-\ln x^4 + c) \Rightarrow y^{-2} = x^2(-\ln x^4 + c) \xrightarrow{\frac{-1}{2}\ \text{توان}} y = x^{-1}(-\ln x^4 + c)^{-\frac{1}{2}}$$

راه دوم

$$y^2 = \frac{1}{x^2(-\ln x^4 + c)} \Rightarrow y = \frac{1}{\pm\sqrt{x^2(-\ln x^4 + c)}}$$

تمرین : (درس در ادامه) ← در صفحهٔ بعدی

معادله مسیرهای قائم بر دسته منحنی‌های زیر را بیابید.

$$y=cx^3 \quad , \quad x^2+(y-c)^2=c^2 \quad , \quad y=cx^2+4 \quad , \quad y=cx+1-c$$

$$y=cx^2 \quad , \quad (x-c)^2+y^2=c$$

معادلات دیفرانسیل مرتبه اول که نسبت به مشتق حل نشده اند یعنی به صورت $F(x,y,y')=0$ هستند : (در سرفصل لغو شده و در امتحان نمی آید)

مثال:

$$xy'^2+2xy'-y=0$$

$$y'=\frac{-2x\pm\sqrt{4x^2+4xy}}{2x} \begin{cases} y'=-1+\sqrt{1+\frac{y}{x}} \\ y'=-1-\sqrt{1+\frac{y}{x}} \end{cases}$$

$$y'=-1+\sqrt{1+\frac{y}{x}} \Rightarrow y=vx \; , \; y'=v'x+v$$

$$v'x+v=-1+\sqrt{1+\frac{vx}{x}} \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=-1-v+\sqrt{1+v}$$

$$\int\frac{dv}{-(1+v)+\sqrt{1+v}}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow 2\ln\left|1-\sqrt{1+v}\right|=\ln|x|+\ln c$$

$$\ln\left(1-\sqrt{1+v}\right)^2=\ln xc \Rightarrow \left(1-\sqrt{1+\frac{y}{x}}\right)^2=xc$$

$$1+v=t^2 \Rightarrow dv=2t\,dt \Rightarrow \int\frac{2t\,dt}{-t^2+t}=2\int\frac{dt}{1-t}=-2\ln|1-t|=2\ln\left|1-\sqrt{1+v}\right|$$

$$\left[\left(1-\sqrt{1+\frac{y}{x}}\right)^2-xc\right]\left[y'=-1-\sqrt{1-\frac{y}{x}}\ \text{جواب معادله عمومی با}\right]=0$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال:

$(xy'^2 - y' - x^2y' + x)(x^2y' + y' - 1) = 0$

$(xy'^2 - y' - x^2y' + x)(x^2y' + y' - 1) = 0 \Rightarrow \left[xy'(y' - x) - (y' - x)\right](y'(x^2+1) - 1) = 0$

$\begin{cases} (y' - x)(xy' - 1) = 0 \\ y'(x^2+1) - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1+x^2} \Rightarrow \int dy = \int \dfrac{1}{1+x^2}dx \Rightarrow y = tg^{-1}x + c \end{cases}$

$\Rightarrow y' - x = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = x \Rightarrow \int dy = \int x dx \Rightarrow y = \dfrac{x^2}{2} + c$

$xy' - 1 = 0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x} \Rightarrow \int dy = \int \dfrac{1}{x}dx \Rightarrow y = \ln|x| + c$

جواب کلی: $(y - tg^{-1}x + c)(y - \dfrac{x^2}{2} + c)(y - \ln|x| + c) = 0$

مثال ویژه: $y = F(x, y') \Rightarrow y' = \dfrac{d}{dx}(F(x, y'))$; $y' = P$ و ...

مثال:

$y = y'^2 + xy' - x \qquad y = P^2 + Px - x \Rightarrow y' = 2P\dfrac{dP}{dx} + x\dfrac{dP}{dx} + P - 1$

$P = (2P + x)\dfrac{dP}{dx} + P - 1 \Rightarrow (2P + x)\dfrac{dP}{dx} = 1 \Rightarrow \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{1}{2P + x}$

$\dfrac{dx}{dP} = 2P + x \Rightarrow \dfrac{dx}{dP} - x = 2P \qquad \triangle\; x' + P(P)x = Q(P)$

$x = e^{\int -P(P)dP}\left[\int Q(P) e^{\int P(P)dP} dP + c\right]$

$\Rightarrow x = e^{\int dP}\left[2P e^{-\int dP} dP + c\right] = e^{P}\left[\int 2P e^{-P} dP + c\right]$

$$= e^{p}\left[2\left(-pe^{-p}-e^{-p}\right)+c\right] = -2p-2+ce^{p} \Rightarrow \begin{cases} x=-2p-2+ce^{p} \\ y=p^{2}+px-x \end{cases}$$

مثال:

$$y=y'+\ln y' \qquad y=p+\ln p \Rightarrow y'=\frac{dp}{dx}+\frac{1}{p}\frac{dp}{dx}$$

$$p=\left(1+\frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx} \Rightarrow dx=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{2}}\right)dp \Rightarrow \int dx=\int\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p^{2}}\right)dp$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\ln p-\frac{1}{p}+c \\ y=p+\ln p \end{cases}$$

$$x=tg^{-1}y'+y' \qquad x=f(y,y') \Rightarrow$$ مشتق نسبت به y می‌گیریم

$$\frac{dy}{dx}=y'=p \Rightarrow x=tg^{-1}p+p \Rightarrow \frac{dx}{dy}=\frac{p'}{1+p^{2}}+\frac{dp}{dy}=\left(\frac{1}{p^{2}+1}+1\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p}=\left(\frac{1}{p^{2}+1}+1\right)\frac{dp}{dy} \Rightarrow \int dy=\int\left(\frac{p}{p^{2}+1}+p\right)dp \Rightarrow \begin{cases} y=\frac{1}{2}\ln(p^{2}+1)+\frac{p^{2}}{2}+c \\ x=tg^{-1}p+p \end{cases}$$

معادله‌ی کلرو:

$$y=xy'+g(y')$$

طبق قاعده زنجیره‌ای

$$y'=p \Rightarrow y=xp+g(p) \xrightarrow{\text{مشتق}} y'=p+x\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p=p+(x+g'(p))\frac{dp}{dx} \Rightarrow (x+g'(p))\frac{dp}{dx}=0 \xrightarrow[\text{فرض}]{x+g'(p)\neq 0} \frac{dp}{dx}=0 \Rightarrow p=c$$

در رابطه به جای p قرار می‌دهیم c $\Rightarrow$ جواب عمومی $y_G=xc+g(c)$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $y = xy' + \frac{1}{2y'}$ $\quad y = xp + \frac{1}{2p} \Rightarrow y' = p + x\frac{dp}{dx} + \frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{p^2}\frac{dp}{dx}$

$$\xRightarrow{y'=p} p = p + \underbrace{\left(x - \frac{1}{2p^2}\right)}_{\text{فرض } \neq 0}\frac{dp}{dx} \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

جواب عمومی
$$\Rightarrow y_c = cx + \frac{1}{2c}$$

⚠ در این درس سؤال‌های کلرو حتمی نوشتن جواب $c=0$ قابل قبول است

جواب انشانی:
$$\begin{cases} x - \frac{1}{2c^2} = 0 \\ y - cx - \frac{1}{2c} = 0 \end{cases}$$

مثال: جواب عمومی و انشانی معادله کلرو زیر را بدست آورید.

$$y = xy' + y'^2 \quad y = xp + p^2 \Rightarrow y' = p + x\frac{dp}{dx} + 2p\frac{dp}{dx}$$

$$\Rightarrow p = p + (x+2p)\frac{dp}{dx} \xRightarrow{x+2p\neq 0} \frac{dp}{dx} = 0 \Rightarrow p = c$$

$$\Rightarrow y = xc + c^2$$ جواب عمومی

جواب انشانی را از حل دستگاه زیر بدست می‌آوریم
$$\begin{cases} y = xc + g(c) \\ 0 = x + g'(c) \end{cases}$$
فرض می‌کنیم صفر نیست ولی برای انشانی مساوی صفر قرار می‌دهیم

جواب انشانی:
$$\begin{cases} x + 2c = 0 \Rightarrow c = \frac{-x}{2} \\ y - xc - c^2 = 0 \Rightarrow y = x \times \frac{-x}{2} + \frac{x^2}{4} \end{cases}$$

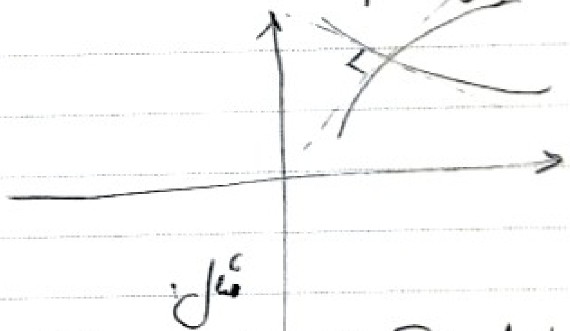
$$\Rightarrow y = \frac{-x^2}{2} + \frac{x^2}{4} = \frac{-2x^2 + x^2}{4} = \frac{-x^2}{4}$$ جواب انشانی

⚠ جواب انشانی جوابی است که از روی جواب عمومی به دست نمی‌آید.

جواب عمومی معادلات زیر را بیابید و جواب استثنائی.

$$y = xy' - e^{y'} \quad , \quad y = xy' + 4(y')^{3} \quad , \quad y = xy' - \sin y'$$

مسیرهای قائم:



مثال:

$$e^{x} + e^{-y} = c$$

راه حل: ① محاسبه‌ی c بر حسب x و y

② مشتق بر حسب x

③ $y' \to -\frac{1}{y'}$

④ جواب معادله دیفرانسیل خانواده‌ی مورد نظر است.

$$e^{x} - y'e^{-y} = 0 \Rightarrow e^{x} + \frac{1}{y'}e^{-y} = 0 \Rightarrow e^{y}y' = -e^{-x} \Rightarrow e^{y}\frac{dy}{dx} = -e^{-x}$$

$$\Rightarrow \int e^{y}dy = \int -e^{-x}dx \Rightarrow e^{y} - e^{-x} = c$$

حل عمومی معادلات زیر را بیابید.

$y' = \frac{xy}{x^2-y^2}$ و $(x-y)dx+(-x+y+2)dy=0$ و $y'=\frac{1+y^2}{1+x^2}$

$xy'+y=2yy'x^2\ln y$ و $xy'=y+\frac{xe^{x}}{4y^2}$ (راهنمایی $y=ux$)

$y=2xy'+\frac{1}{y'^2}$ و $(2xy+2x^2y^2)y'=1$

$y'=tg\left(x-\frac{y'}{1+y'^2}\right)$ و $y'=y(y^3\cos x+tg x)$

$\left(x\sqrt{x^2+y^2}-y\right)dx+\left(y\sqrt{x^2+y^2}-x\right)dy=0$ و $y'=\frac{xye^{y/x}}{x^2e^{y/x}-y^2}$

$y\ln y\,dx+(x-\ln y)dy=0$ و $y'+\frac{2}{x}y=x^2y^3$

$xy'+y=y^2\ln x$ و $(\ln x+y^3)dx-3xy^2dy=0$ (عامل انتگرال)

Subject:
Year. Month. Date.

معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم :

$$F(x, y, y', y'') = 0$$

دسته اول : فاقد y (متغیر وابسته) باشد

دسته دوم : فاقد x (متغیر مستقل) باشد .

مثال : $x^2 y'' + 2xy' - 1 = 0 \quad ; \quad x > 0$ (فاقد y)

$$y' = u \Rightarrow y'' = u' \Longrightarrow x^2 u' + 2xu - 1 = 0 \xrightarrow{\div x^2} u' + \frac{2}{x} u - \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow u' + \underbrace{\left(\frac{2}{x}\right)}_{p(x)} u = \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{q(x)} \Longrightarrow u = e^{-\int \frac{2}{x} dx} \left[\int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2}{x} dx} dx + c\right]$$

$$u = \frac{1}{x^2}\left[x + c\right] = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2}$$

$$\Longrightarrow y' = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2} \Rightarrow dy = \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}\right) dx$$

$$\int dy = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{c_1}{x^2}\right) dx \Longrightarrow y = \ln x - \frac{c_1}{x} + c_2$$ جواب عمومی

مثال : $yy'' + y'^2 = 0$ (فاقد x) $\quad y' = u \xrightarrow{\text{مشتق زنجیره ای می گیریم}} y'' = \frac{du}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = u \frac{du}{dy}$

$$\Rightarrow yu \frac{du}{dy} + u^2 = 0 \xrightarrow{\div yu} \frac{du}{dy} + \frac{1}{y} u = 0 \Longrightarrow \frac{du}{dy} = \frac{-1}{y} u$$

u ← معادله خطی مرتبه اول جدایی پذیر

$$\Longrightarrow \frac{du}{u} = \frac{-dy}{y} \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{-dy}{y} \Longrightarrow \ln|u| = -\ln|y| + \ln c_1$$

$$\Rightarrow \ln|u| = \ln\left|\frac{c_1}{y}\right| \Rightarrow u = \frac{c_1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{c_1}{y} \Rightarrow y\,dy = c_1 dx \Rightarrow \int y\,dy = \int c_1 dx$$

$$\Longrightarrow \frac{y^2}{2} = c_1 x + c_2$$

$$\Longrightarrow y = \pm\sqrt{2c_1 x + 2c_2}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

معادلات خطی مرتبه دوم :

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$$ (۱) ناهمگن

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$ (۲) همگن

$$F(x, y, y', y'') = 0$$ (۳) حالت کلی

⚠ زمانی دو تابع مستقل خطی هستند که تقسیم آن ها برهم مقدار ثابتی نباشد.

دو تابع y_1 و y_2 را مستقل خطی نامند هرگاه $\frac{y_1}{y_2}$ یک عدد ثابت نشود. مثال:

$$\begin{cases} y_1 = \sin x \\ y_2 = \cos x \end{cases}$$

در غیر این صورت به آن دو تابع وابسته خطی می‌گویند. مثال: $y_1 = \sin x$ و $y_2 = 2\sin x$

قضیه ۱: هرگاه y_1 و y_2 دو جواب مستقل خطی معادله شماره (۳) باشند، در این صورت جواب عمومی آن عبارت است از: $y_G = c_1 y_1 + c_2 y_2$

قضیه ۲: هرگاه y_p یک جواب خصوصی معادله شماره (۱) باشد، و y_c جواب عمومی معادله شماره (۲) باشد (همگن متناظر با معادله ۱) در این صورت جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از:

$$y_G = y_c + y_p$$

تبصره ۳: هرگاه $r(x)$ به این صورت باشد، $r(x)=r_1(x)+\dots+r_n(x)$

و y_{G_i} که $i=1,2,\dots,n$ جواب عمومی معادله $y''+p(x)y'+q(x)y=r_i(x)$

در این صورت جواب عمومی معادله (۱) عبارت است از:

$$\boxed{y_G=y_{G_1}+\dots+y_{G_n}}$$

روش کاهش مرتبه (تغییر پارامتر): برای حل معادلات شماره (۱) و یا (۲) می‌توان

از این روش به شرح زیر استفاده کرد.

۱) فرض می‌کنیم $y_1(x)$ یک جواب ناصفر معادله همگن متناظر (۲) باشد.

۲) بنابر مطلب قبل $y=vy_1$ نیز جواب معادله (۲) است.

۳) فرض می‌کنیم v تابعی از x باشد. با محاسبه مشتقات y و جایگذاری در معادله (۱):

مقدار v را بدست می‌آوریم.

۴) $y=vy_1$ جواب عمومی معادله شماره (۱) است.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

مثال: با فرض اینکه $y_1=x$ یک جواب خصوصی $x^2y''-xy'+y=x^4 \quad ; \quad x>0$

همگن متناظر باشد، جواب عمومی معادله را بیابید. / $x^2y''-xy'+y=0 \quad , \quad y_1=x$

در معادله صدق می‌کند

v تابعی از x است $\Longrightarrow$ جواب معادله ناهمگن به شکل $\rightarrow y=vy_1=vx$

$\Rightarrow y'=v'x+v \Rightarrow y''=v''x+2v'$ در معادله قرار می‌دهیم

$$\Rightarrow x^2(v''x+2v')-x(v'x+v)+vx=x^4$$

$$\Rightarrow x^3v''+2v'x^2-v'x^2-vx+vx=x^4 \Rightarrow x^3v''+v'x^2=x^4$$

معادله مرتبه دوم فاقد (v)

$$\xrightarrow[v''=u']{v'=u} x^3u'+x^2u=x^4 \Rightarrow u'+\frac{1}{x}u=x \Rightarrow \begin{cases} p=\frac{1}{x} \\ q=x \end{cases}$$

$$u=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+c_1\right]$$

$$=e^{-\int\frac{1}{x}dx}\left[\int x e^{\int\frac{1}{x}dx}dx+c_1\right]=\frac{1}{x}\left[\int x^2dx+c_1\right]=\frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+c_1\right)$$

$$\Rightarrow u=\frac{x^2}{3}+\frac{c_1}{x}=v' \Rightarrow v=\int\left(\frac{x^2}{3}+\frac{c_1}{x}\right)dx=\frac{x^3}{9}+c_1\ln x+c_2$$

$$y_G=vy_1=\left(\frac{x^3}{9}+c_1\ln x+c_2\right)x$$

سؤال امتحانی : اگر $y_1 = x$ یک جواب خصوصی معادله $(1+x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0$ همگن
باشد جواب عمومی آن را بیابید.

$$y = v y_1 = vx \Rightarrow \begin{cases} y' = v'x + v \\ y'' = v''x + 2v' \end{cases}$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(v''x+2v') - 2x(v'x+v) + 2vx = 0$$

$$\Rightarrow v''x + 2v' + v''x^3 + \cancel{2x^2v'} - \cancel{2x^2v'} - 2xv + 2vx = 0 \Rightarrow v''x^3 + v''x + 2v' = 0$$

$$\Rightarrow (x^3+x)v'' + 2v' = 0$$

معادله‌ی مرتبه ۲ فاقد y

$$\xrightarrow[v''=u']{v'=u} (x^3+x)u' + 2u = 0 \Rightarrow u' + \frac{2}{x^3+x}u = 0$$

معادله‌ی مرتبه اول خطی جدایی‌پذیر

$$\Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{-2}{x^3+x}dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{-2}{x^3+x}dx = -2\int \frac{1}{\underbrace{x^3+x}_{x(1+x^2)}}dx = -2\int\left(\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\right)dx$$

$$\frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{Ax^2+A+Bx^2+Cx}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x^3+x}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C=0 \\ A=1 \end{cases} \Rightarrow B=-1$$

$$\Rightarrow \int\frac{du}{u} = -2\int\left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx \Rightarrow \ln|u| = -2\left(\ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2+1|\right) + \ln|c|$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \ln|u| = -2\ln|x| + \ln|x^2+1| + \ln|c_1| = \ln\frac{c_1(x^2+1)}{x} \Rightarrow u = \frac{c_1(x^2+1)}{x^2}$$

$$u=r' \Rightarrow \frac{c_1(x^2+1)}{x^2} = r' \Rightarrow r = c_1\int\frac{x^2+1}{x^2}\,dx = c_1\int\left(1+\frac{1}{x^2}\right)dx = c_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+c_2$$

$$\Rightarrow y_G = r\,y_1 = \left[c_1\left(x-\frac{1}{x}\right)+c_2\right]x$$

تمرین:

۱) $y'' = y'$

۲) $y'' = -y'$

۳) $y'' + 6y' = 0$

۴) $y'' + 3y' + 4y = 0$

۵) $y'' - y' + y = 0$

۶) $y'' + 2y' + (\omega^2+1)y = 0$

۷) $y'' + 5y' + 6y = 0$

۸) $y'' + y' + y = 0$

۹) $y'' + 4y' + 4y = 0$

۱۰) $y'' + y' + 3y = 0$

Subject: [redacted] Year Month Date

معادلات خطی مرتبه دوم همگن با ضرایب ثابت:

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad \begin{cases} y = e^{rx} \longrightarrow \text{قبلاً ثابت شده} \\ y' = re^{rx} \\ y'' = r^2 e^{rx} \end{cases}$$

(a, b, c ثابت می‌باشند)

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0 \Rightarrow (ar^2+br+c)\underbrace{e^{rx}}_{\text{هیچگاه صفر نمی‌شود}} = 0 \Rightarrow ar^2+br+c=0$$

معادله‌ی مشخصه

مثال: $2y'' - y' - y = 0$ معادله همگن مرتبه دو است

$$2(r^2e^{rx}) - re^{rx} - e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(2r^2-r-1) = 0 \Rightarrow 2r^2-r-1=0$$

معادله مشخصه

$$\Delta = 1+8 = 9 \qquad r_1, r_2 = \frac{+1\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} r_1 = 1 \\ r_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{y = c_1e^{1x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x} = c_1e^{x} + c_2e^{-\frac{1}{2}x}}$$

حالت اول $\Delta > 0$

جواب عمومی $y_G = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

$$r^2e^{rx} - 2re^{rx} + e^{rx} = 0 \Rightarrow e^{rx}(r^2-2r+1) = 0 \Rightarrow r^2-2r+1 = 0$$

معادله مشخصه

$\Delta = 0$

$$\Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r = 1 \text{ ریشه مضاعف} \Rightarrow \boxed{y = c_1e^{x} + c_2xe^{x}}$$

اگر ریشه مضاعف بود باید x را در قسمت قبلی ضرب کنیم

حالت دوم $\Delta = 0$

جواب عمومی $y_G = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$

Subject: Year. Month. Date.

$\cos(-x)=\cos x$
$\sin(-x)=-\sin x$

$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$

$e^{a+b}=e^{a}e^{b}$

$y''-2y'+10y=0$ $\quad \boxed{\sqrt{-1}=i}$ $\quad r^2-2r+10=0$ معادله مشخصه $\Leftarrow \Delta=4-40=-36<0$

ریشه حقیقی ندارد و ریشه مختلط دارد.

$$r_1,r_2=\frac{2\pm 6i}{2}\Rightarrow\begin{cases}r_1=1+3i\\ r_2=1-3i\end{cases}$$

حالت سوم $\Delta<0$

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}=c_1e^{(1+3i)x}+c_2e^{(1-3i)x}=c_1e^{x}e^{3ix}+c_2e^{x}e^{-3ix}$$

$$=c_1e^{x}(\cos 3x+i\sin 3x)+c_2e^{x}(\cos 3x-i\sin 3x)$$

$$=e^{x}\left[\overbrace{(c_1+c_2)}^{A}\cos 3x+\overbrace{(ic_1-ic_2)}^{B}\sin 3x\right]=e^{x}(A\cos 3x+B\sin 3x)$$

$y''+2y'+2y=0$ $\quad r^2+2r+2=0 \Rightarrow \Delta=4-4(2)=-4<0$

$$r_1,r_2=\frac{-2\pm 2i}{2}\Rightarrow\begin{cases}r_1=-1+i\\ r_2=-1-i\end{cases}$$

$$y=c_1e^{(-1+i)x}+c_2e^{(-1-i)x}=c_1e^{-x}e^{ix}+c_2e^{-x}e^{-ix}$$

$$=c_1e^{-x}(\cos x+i\sin x)+c_2e^{-x}(\cos x-i\sin x)$$

$$=e^{-x}\left[(c_1+c_2)\cos x+(ic_1-ic_2)\sin x\right]=e^{-x}\left[A\cos x+B\sin x\right]$$

$$r_1,r_2=\alpha\pm i\beta\Rightarrow y_G=e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x+c_2\sin\beta x)$$

جواب عمومی

Subject:
Year: ۹ Month: Date: / /

تمرین: جواب خصوصی معادله را با شرایط $y(0)=1$ و $y'(0)=1$ بیابید.

$$y''+2y'+2y=0 \qquad \text{از قبل داریم} \quad y_G=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

$$\xrightarrow{y(0)=1} 1=e^{0}(C_1\cos 0+C_2\sin 0) \Rightarrow 1=C_1$$

$$\Rightarrow y'_G=-e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(-\sin x+C_2\cos x)$$

$$\xrightarrow{y'(0)=1} 1=-e^{0}(\cos 0+C_2\sin 0)+e^{0}(-\sin 0+C_2\cos 0)$$

$$\Rightarrow 1=-1+C_2 \Rightarrow C_2=2$$

$$\Rightarrow \underset{\text{جواب خصوصی}}{y_p}=e^{-x}(\cos x+2\sin x)$$

معادلات خطی مرتبه دوم ناهمگن:

$$y''+p(x)y'+q(x)y=r(x) \qquad (I)$$

y_c حل عمومی معادله همگن نظیر (I)

y_p جواب خصوصی معادله (I)

$$\Rightarrow y_G=y_c+y_p \qquad \text{جواب عمومی معادله ناهمگن (I)}$$

روش اول: تغییر پارامتر

$$y_c=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

نکته:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}=y_1y'_2-y_2y'_1\neq 0 \Rightarrow \text{مستقل خطی هستند } y_2 \text{ و } y_1$$

↳ wronskian

Subject:
Year. Month. Date.

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$y_p = -y_1\int \frac{y_2\, r(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx + y_2\int \frac{y_1\, r(x)}{W(y_1, y_2)}\,dx$$

y_1 و y_2 جواب های مستقل خطی ی همگن متناظر

مثال: $y'' + 4y = \underbrace{\cos 2x}_{r(x)}$ ، $y'' + 4y = 0$ معادله همگن نظیر $\Rightarrow r^2 + 4 = 0$ $\Rightarrow r_1, r_2 = \pm 2i$

$$y_c = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x \qquad \begin{cases} y_1(x) = \cos 2x \\ y_2(x) = \sin 2x \end{cases}$$

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x = 2 \neq 0$$ مستقل خطی

$$y_p = -\cos 2x\int \frac{\sin 2x\cos 2x}{2}\,dx + \sin 2x\int \frac{\cos 2x\cos 2x}{2}\,dx$$

$$= \frac{-\cos 2x}{4}\int \sin 4x\,dx + \frac{\sin 2x}{4}\int (1+\cos 4x)\,dx$$

$$= \frac{1}{16}\cos 2x\cos 4x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x\sin 4x$$

$$\Rightarrow y_G = y_c + y_p = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{1}{16}\cos 2x\cos 4x + \frac{1}{4}x\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x\sin 4x$$

ابتدا معادله همگن متناظر با معادله داده شده را تشکیل داده و جواب عمومی آن را به دست می آوریم.

$y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ سپس رونسکین y_1 و y_2 را به صورت گفته شده بدست می آوریم.. در این حالت رونسکین باید

مخالف صفر باشد که y_1 و y_2 مستقل خطی هستند. سپس y_p را از فرمول تشکیل داده و در نهایت $y_G = y_p + y_c$

تمرین: $y''+4y'+4y=\underbrace{e^{-2x}}_{r(x)}$ $\quad y''+4y'+4y=0 \Rightarrow r^2+4r+4=0$

$$\Rightarrow (r+2)^2=0 \Rightarrow r=-2$$

$$y_c=c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x} \quad \begin{cases} y_1(x)=e^{-2x} \\ y_2(x)=xe^{-2x} \end{cases}$$

$$w(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{-2x} & xe^{-2x} \\ -2e^{-2x} & -2e^{-2x}x+e^{-2x} \end{vmatrix}=e^{-2x}\left(-2xe^{-2x}+e^{-2x}\right)+2e^{-2x}\cdot x\cdot e^{-2x}$$

$$=-2e^{-4x}x+e^{-4x}+2xe^{-4x}=e^{-4x}\neq 0$$ مستقل خطی

$$y_p=-e^{-2x}\int\frac{xe^{-2x}\cdot e^{-2x}}{e^{-4x}}dx+xe^{-2x}\int\frac{e^{-2x}\cdot e^{-2x}}{e^{-4x}}dx$$

$$=-e^{-2x}\int x\,dx+xe^{-2x}\int 1\,dx=\frac{-x^2e^{-2x}}{2}+x^2e^{-2x}=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}$$

$$y_G=y_p+y_c=\frac{1}{2}x^2e^{-2x}+c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$$

تمرین: $y''+2y'+2y=\dfrac{1}{e^{x}\sin x}$

روش دوم : ضرایب نامعین

$ay'' + by' + cy = r(x)$

الف) $r(x)$ یک چندجمله‌ای است

$y_p = A_0 + A_1x + A_2x^2$

مثال

$y'' + 3y' + 2y = 2x^2 + x + 1$

$y_p' = A_1 + 2A_2x$

$y_p'' = 2A_2$

$\Longrightarrow 2A_2 + 3(A_1 + 2A_2x) + 2(A_0 + A_1x + A_2x^2) = 2x^2 + x + 1$

$$\begin{array}{l|l} \text{ضریب } x^2 & 2A_2 = 2 \\ \text{ضریب } x & 6A_2 + 2A_1 = 1 \\ \text{ثابت} & 2A_2 + 3A_1 + 2A_0 = 1 \end{array} \Longrightarrow \begin{cases} A_2 = 1 \\ A_1 = \frac{-5}{2} \\ A_0 = \frac{13}{4} \end{cases} \Longrightarrow y_G = y_c + y_p$$ و ...

تمرین:

$y'' + 2y' = x^2 + 2x$

$y_p = (A_0 + A_1x + A_2x^2)x$

اگر در جای‌گذاری دچار مشکل شویم و درجه یک طرف بیشتر از درجه طرف دیگر باشد

طرف با درجه کمتر را در متغیر لازم (در اینجا x) ضرب می‌کنیم تا هر دو طرف از یک درجه باشند

جمله را

$y' = A_1 + 2A_2x$

$y'' = 2A_2$

$\Longrightarrow 2A_2 + 2(A_1 + 2A_2x) = x^2 + 2x$

یک طرف درجه دو و طرف دیگر درجه ۱ ! X

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین : جواب عمومی معادلات زیر را پیدا کنید.

$y'' + y = \sec x$

$y'' + 4y' + 4y = e^{x}$

$y'' + y = tg^{2} x$

$y'' + y = 4 \sin 2x$

$y'' - y = \dfrac{2e^{x}}{e^{x} - 1}$

$y'' + y = x^{2}$

$y'' + y = \dfrac{-1}{x}$

$y'' - 4y' + 3y = e^{-x}$

Subject: [redacted]
Year. Month. Date. ( )

$$ay'' + by' + cy = r(x)$$

$$r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} \cos\beta x \quad \text{و} \quad r(x) = P_n(x)\, e^{\alpha x} \sin\beta x$$

$$y_p = \left[(A_0 + A_1 x + \dots + A_n x^n) \cos\beta x + (B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n) \sin\beta x \right] x^S e^{\alpha x}$$

که در آن S مرتبه تکرار ریشه‌های معادله مشخصه $(a \pm ib)$ می‌باشد.

مثال: اول حل می‌کنیم و معادله مشخصه تشکیل می‌دهیم — $y'' + 2y' + 2y = x e^{-x} \cos x$

معادله مشخصه
$r^2 + 2r + 2 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 = -1 \pm i$

$$y_c = e^{-x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x) \Rightarrow y_p = \left[(A_0 + A_1 x) \cos x + (B_0 + B_1 x) \sin x \right] x e^{-x}$$

x را به داخل ببریم تا راحت‌تر مشتق گرفته شود $\Rightarrow y_p = \left[(A_0 x + A_1 x^2) \cos x + (B_0 x + B_1 x^2) \cos x \right] e^{-x}$

$\Leftarrow$ y_p' و y_p'' را بدست می‌آوریم (که خیلی طولانی است)

بعد برای مثال ضرایب $\sin x$ را در نظر می‌گیریم، یکبار ضریب ثابت، یکبار ضرایب با $x \sin x$، یکبار با $x^2 \sin x$ یکبار با $x^3 \sin x$، به این ترتیب ضرایب A_0 و B_1 و ... بدست می‌آید.

(باید در معادله اولیه قرار دهیم تا ضرایب بدست آید. مساوی صفر باید قرار دهیم)

چون طرف دوم معادله $\sin x$ نداریم و ضرایب آن در همه صفر است

در نهایت $y_G = y_p + y_c$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: معادله زیر را حل کنید و جواب عمومی پیدا کنید.

$$y'' - 2y' = e^{x} \sin x \quad (\mathrm{I})$$

$$r^2 - 2r = 0 \Rightarrow r(r-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = 2 \end{cases}$$ ریشه‌های معادله مشخصه

جواب خصوصی معادله است، پس خودش و مشتقاتش باید در معادله صدق کند

$$y_C = C_1 e^{2x} + C_2 e^{0x}, \quad y_p = e^{x}(A_1 \cos x + A_2 \sin x)$$

$$\Rightarrow y_p' = e^{x}(A_1 \cos x + A_2 \sin x) + (-A_1 \sin x + A_2 \cos x)e^{x}$$

$$\Rightarrow y_p'' = e^{x}(A_1 \cos x + A_2 \sin x) + (-A_1 \sin x + A_2 \cos x)e^{x} + e^{x}(-A_1 \sin x + A_2 \cos x)$$

$$+ (-A_1 \cos x - A_2 \sin x)e^{x} = 2e^{x}(-A_1 \sin x + A_2 \cos x)$$

$$y'' - 2y' = 2e^{x}(-A_1 \sin x + A_2 \cos x) - 2e^{x}(A_1 \cos x + A_2 \sin x) - 2e^{x}(-A_1 \sin x + A_2 \cos x)$$

$$= -2A_1 e^{x} \cos x - 2A_2 e^{x} \sin x = e^{x} \sin x \quad (\mathrm{I})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2A_1 = 0 \\ -2A_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 0 \\ A_2 = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow y_p = e^{x}\left(\frac{-1}{2} \sin x\right)$$

$$y_G = y_p + y_C = C_1 e^{2x} + C_2 - \frac{1}{2} e^{x} \sin x$$

معادلات کوشی - اویلر :

$$(ax+b)^2y'' + A_1(ax+b)y' + A_2y = r(x)$$ کوشی $\rightarrow ax+b=t$

$$a=1,\ b=0 \Rightarrow x^2y'' + A_1xy' + A_2y = r(x)$$ اویلر $\rightarrow x=e^t$

$$x=e^t \Rightarrow \ln x = \ln e^t = t \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} = e^{-t}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot e^{-t},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{\frac{d^2y}{dt^2}e^{-t} - \frac{dy}{dt}e^{-t}}{\frac{dx}{dt}=e^t} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}$$

مثال:

$$x^2y'' - xy' + 4y = \cos\ln x + x\sin\ln x$$

تغییر متغیر $\boxed{x=e^t,\ \ln x = t}$

$$e^{2t}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)e^{-2t} - e^t\frac{dy}{dt}e^{-t} + 4y = \cos t + e^t\sin t$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} - 2\frac{dy}{dt} + 4y = \cos t + e^t\sin t$$

⚠ برای رسیدن به معادله کوشی - اویلر به صورت ... ضریب y'' را حذف می‌کنیم و از ضریب y' یک عدد کم می‌کنیم و نتیجه را هم می‌نویسیم

$$r^2 - 2r + 4 = 0 \Rightarrow r_1, r_2 : \Delta = -12$$

$$\Rightarrow r_1, r_2 = \frac{+2 \pm 2\sqrt{3}\,i}{2} = 1 \pm \sqrt{3}\,i$$

⚠ جواب $r(x)$ حاصل جمع چند تابع است و فرض است هربار یکی از مجموع‌ها را $r(x)$ می‌گیریم و y_p تشکیل می‌دهیم

$$\boxed{y_c = e^x\left(C_1\cos\sqrt{3}t + C_2\sin\sqrt{3}t\right)}$$

$$r_1(t) = \cos t \Rightarrow y_{p_1} = A_1\cos t + A_2\sin t \Rightarrow y'_{p_1} = -A_1\sin t + A_2\cos t$$

$$\Rightarrow y''_{p_1} = -A_1\cos t - A_2\sin t \xrightarrow[\text{در معادله}]{\text{جاگذاری}} -A_1\cos t - A_2\sin t + 2A_1\sin t - 2A_2\cos t + 4A_1\cos t + 4A_2\sin t$$

$$= (3A_1 - 2A_2)\cos t + (3A_2 + 2A_1)\sin t = \cos t$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$\Rightarrow \begin{cases} 3A_1 - 2A_2 = 1 \\ 3A_2 + 2A_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow A_2 = -\frac{2}{13} \,,\; A_1 = \frac{3}{13} \Rightarrow \boxed{y_{P_1} = \frac{3}{13}\cos t - \frac{2}{13}\sin t}$$

$$r_2(t) = e^{t}\sin t \Rightarrow y_{P_2} = e^{t}(A_1\cos t + A_2\sin t) \Rightarrow y'_{P_2} = e^{t}(A_1\cos t + A_2\sin t) + e^{t}(-A_1\sin t + A_2\cos t)$$

$$\Rightarrow y''_{P_2} = e^{t}(A_1\cos t + A_2\sin t) + e^{t}(-A_1\sin t + A_2\cos t) + e^{t}(-A_1\sin t + A_2\cos t) + e^{t}(-A_1\cos t - A_2\sin t)$$

$$= 2e^{t}(-A_1\sin t + A_2\cos t) = e^{t}(-2A_1\sin t + 2A_2\cos t)$$

$$\overset{\text{جایگذاری}}{\Rightarrow} (-2B_1\sin t + 2B_2\cos t)e^{t} - 2(B_1\cos t + B_2\sin t)e^{t} - 2(-B_1\sin t + B_2\cos t)e^{t}$$

$$+ 4e^{t}(B_1\cos t + B_2\sin t) = e^{t}\sin t$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2B_2 - 2B_1 - 2B_2 + 4B_1 = 0 \Rightarrow B_1 = 0 \\ -2B_1 - 2B_2 + 2B_1 + 4B_2 = 1 \Rightarrow B_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \boxed{y_{P_2} = e^{t}\left(\frac{1}{2}\sin t\right)}$$

$$\Rightarrow y_G = \underbrace{y_P}_{y_{P_1}+y_{P_2}} + y_C = \frac{3}{13}\cos t - \frac{2}{13}\sin t + e^{t}\left(\frac{1}{2}\sin t\right) + e^{t}\left(C_1\cos\sqrt{4}\,t + C_2\sin\sqrt{4}\,t\right)$$

که در مرحله آخر به جای t ، Ln x قرار میدهیم

Subject:
Year. Month. Date.

جواب عمومی معادله را بدست آورید.

$$(x+2)^2\frac{d^2y}{dx^2}-2(x+2)\frac{dy}{dx}+y=3x+4$$

$$x+2=e^t \Rightarrow x=e^t-2$$

با جایگذاری

$$\frac{d^2y}{dt^2}-3\frac{dy}{dt}+y=3e^t-2$$

$$\Rightarrow r^2-3r+1=0 \Rightarrow r_1, r_2=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$$

متمایز

$$\boxed{y_c=C_1e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}+C_2e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}}$$

$$r_1(t)=3e^t \Rightarrow y_{p_1}=Ae^t \Rightarrow y'_{p_1}=Ae^t \Rightarrow y''_{p_1}=Ae^t$$

جایگذاری

$$\Rightarrow Ae^t-3Ae^t+Ae^t=3e^t \Rightarrow -Ae^t=3e^t \Rightarrow A=-3 \Rightarrow y_{p_1}=-3e^t$$

$$r_2(t)=-2 \Rightarrow y_{p_2}=-2 \Rightarrow y_G=y_p+y_c=-3e^t-2+C_1e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}+C_2e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}$$

$$\Rightarrow y_G=-3e^{\ln(x+2)}-2+C_1e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\ln(x+2)}+C_2e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}\ln(x+2)}$$

تمرین:

$x^2y''+xy'-y=0$ و $x^2y''+xy'+y=0$ و $(3x+2)^2y''+3(3x+2)y'-36y=3x^2+4x+1$

$(2x+1)^2y''-2(2x+1)y'-12y=6x$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تبدیل لاپلاس :

$$L[f(x)] = \int_0^\infty f(x) e^{-sx} dx$$

مثال : تبدیل لاپلاس توابع زیر را پیدا کنید .

- $L[1] = \int_0^\infty 1 . e^{-sx} dx \xrightarrow{s>0} L[1] = \frac{1}{s}$

$$L[x] = \int_0^\infty x e^{-sx} dx = \lim \left[-\frac{1}{s} x e^{-sx} - \frac{1}{s^2} e^{-sx} \right]_0^b = \lim \left[\left(-\frac{1}{s} b e^{-sb} - \frac{1}{s^2} e^{-sb} \right) - \left(-\frac{1}{s} 0 e^{0} - \frac{1}{s^2} e^{0} \right) \right]$$

$$\Rightarrow L[x] = \frac{1}{s^2} \quad (s>0)$$

$$L[x^n] = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N}, s>0)$$

$$L[e^{ax}] = \int_0^\infty \underbrace{e^{ax} . e^{-sx}}_{e^{(a-s)x}} dx = \lim \left[\frac{1}{(a-s)} e^{(a-s)x} \right]_0^b = \lim \left(\frac{1}{(a-s)} e^{(a-s)b} - \frac{1}{(a-s)} e^{(a-s)} \right) = \frac{1}{s-a}$$

$$\begin{cases} a>s \\ a-s>0 \end{cases}$$

$$L[\sin ax] = \int_0^\infty \sin ax \, e^{-sx} dx = \int \sin ax \, e^{-sx} dx = -\frac{1}{s} e^{-sx} \sin ax + \frac{a}{s} \int e^{-sx} \cos ax \, dx$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sx} \sin ax + \frac{a}{s} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \cos ax - \frac{a}{s} \int e^{-sx} \sin ax \, dx \right] = \left(1 + \frac{a^2}{s^2}\right) \int_0^\infty \sin ax \, e^{-sx} dx \quad (\text{چپ} \rightarrow \text{راست})$$

$$= \lim \left[-\frac{1}{s} e^{-sx} \sin ax - \frac{a}{s^2} e^{-sx} \cos ax \right]_0^b = \lim \left[\left(-\frac{1}{s} e^{-sb} \sin ab - \frac{a}{s^2} e^{-sb} \cos ab \right) - \left(-\frac{1}{s} e^{0} \sin 0 - \frac{a}{s^2} e^{0} \cos 0 \right) \right]$$

$$\overset{s>0}{=} \frac{a}{s^2} \Rightarrow L[\sin ax] = \frac{a}{s^2 + a^2} \quad (s>0)$$

$\sin ax = u \Rightarrow du = a \cos ax$ ⚠

$e^{-sx} dx = dv \Rightarrow \int e^{-sx} dx = \int dv$
$\Rightarrow -\frac{1}{s} e^{-sx} = v$

⚠ $\cos ax = u \Rightarrow -a \sin ax \, dx = du$

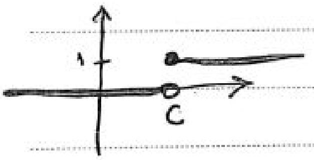
قضیه: تبدیل لاپلاس خاصیت خطی دارد.

$$L[c_1 f(x) + c_2 g(x)] = c_1 L[f(x)] + c_2 L[g(x)]$$

$$L[\sinh ax] = L\left[\frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[L[e^{ax}] - L[e^{-ax}]\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s+a}\right)$$

$$L[f(x)] = \int_0^\infty f(x) e^{-sx}\, dx$$

$$L[\cosh ax] = L\left[\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s+a}\right)$$

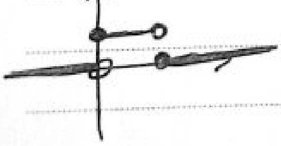


$$U_c(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ 1 & x \geq c \end{cases}$$

تابع پله‌ای هویساید:
heavy-side

$$L[U_c(x)] = \int_0^c 0 \cdot e^{-sx}\, dx + \int_c^\infty 1 \cdot e^{-sx}\, dx = \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{s} e^{-sx}\right]_c^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{s} e^{-sb} + \frac{1}{s} e^{-sc}\right)$$

$$s > 0 \Rightarrow L[U_c(x)] = \frac{1}{s} e^{-sc}$$



$$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases} \qquad f(x) = U_0(x) - U_1(x)$$

$$L[f(x)] = L[U_0(x)] - L[U_1(x)] = \frac{1}{s} e^{0} - \frac{1}{s} e^{-s} = \frac{1}{s}(1 - e^{-s})$$

Subject:
Year.　Month.　Date.

لاپلاس معکوس : فرض کنید $L[f(x)]=F(s)$ ، در این صورت $L^{-1}[F(s)]=f(x)$. یعنی $f(x)$ لاپلاس معکوس $F(s)$ است .

مثال: $L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^4}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]+\frac{1}{3!}L^{-1}\left[\frac{3!}{s^4}\right] = 1+\frac{1}{6}x^3$

نکته: لاپلاس معکوس خاصیت خطی دارد .

$$L^{-1}\left[\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}+\frac{1}{s^2+1}\right] = 1+\sin x$$

⚠ $\frac{s^2+s+1}{s(s^2+1)} = \frac{A_1}{s}+\frac{A_2 s+A_3}{s^2+1}$　　$s^2+s+1 = A_1 s^2+A_1+A_2 s^2+A_3 s$

$\Rightarrow s^2+s+1 = (A_1+A_2)s^2+A_3 s+A_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=0 \\ A_3=1 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{s^2-3s+4}{s^3}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{s}-\frac{3}{s^2}+\frac{4}{s^3}\right] = 1-3x+2x^2$$

$$\frac{s^2-3s+4}{s^3} = \frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s^2}+\frac{A_3}{s^3} \Rightarrow \begin{cases} A_1=1 \\ A_2=-3 \\ A_3=4 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{4s+5}{(s-1)(s+2)}\right] = L^{-1}\left[\frac{3}{s-1}+\frac{1}{s+2}\right] = 3e^{x}+e^{-2x}$$

$$\frac{4s+5}{(s-1)(s+2)} = \frac{A_1}{s-1}+\frac{A_2}{s+2} \Rightarrow (s+2)A_1+A_2(s-1) = s(A_1+A_2)+2A_1-A_2 \Rightarrow \begin{cases} A_1=3 \\ A_2=1 \end{cases}$$

تمرین: 1) $L^{-1}\left[\frac{2s^2-4}{(s-2)(s+1)(s-3)}\right]$　2) $L^{-1}\left[\frac{5s+1}{(s-1)(s^2+1)}\right]$　3) $L^{-1}\left[\frac{2s-3}{s^2-s-6}\right]$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین: توابع زیر را برحسب هویساید بنویسید و تبدیل لاپلاس آن را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<2\\ x & x\geq 2\end{cases} \qquad\qquad f(x)=\begin{cases}2x & 0\leq x<6\\ 0 & x\geq 6\end{cases}$$

قضیه انتقال:

قضیه شماره یک:

$$\begin{tikzcd} f(x) \arrow[r, "L"] \arrow[d, "e^{ax}"'] & F(s) \arrow[d, "s\to s-a"] \\ e^{ax}\cdot f(x) \arrow[r, "?"] & F(s-a) \end{tikzcd}$$

مثال: $L[f(x)]=L[e^{3x}x^2]=\dfrac{2!}{(s-3)^3}$

$$\begin{tikzcd} x^2 \arrow[r] \arrow[d, "e^{3x}"'] & \frac{2!}{s^3} \arrow[d, "s\to s-3"] \\ e^{3x}\cdot x^2 \arrow[r, "?"] & \frac{2!}{(s-3)^3} \end{tikzcd}$$

$$L[e^{-x}\cos x]=\frac{(s+1)}{(s+1)^2+1}$$

$$\begin{tikzcd} \cos x \arrow[r] \arrow[d, "e^{-x}"'] & \frac{s}{s^2+1} \arrow[d, "s\to s+1"] \\ e^{-x}\cos x \arrow[r] & \frac{(s+1)}{(s+1)^2+1} \end{tikzcd}$$

Subject:

Year.　Month.　Date.　( )

قضیه شماره دو:

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \xrightarrow{\quad L \quad} & F(s) \\ {\scriptstyle x \to x-c} \big\downarrow {\scriptstyle \times U_c(x)} & & \big\downarrow {\scriptstyle e^{-sc}} \\ U_c(x)\, f(x-c) & \xrightarrow{\quad ? \quad} & e^{-sc} F(s) \end{array}$$

حل: $L\left[f(x)\right] = L\left[(x^2+3x+2)\,U_1(x)\right]$

$$\begin{array}{ccc} (x+1)^2+3(x+1)+2 = x^2+5x+6 & \longrightarrow & \dfrac{2!}{s^3}+\dfrac{5}{s^2}+\dfrac{6}{s} \\ {\scriptstyle x \to x+1} \big\uparrow {\scriptstyle \div U_1(x)} & & \big\downarrow {\scriptstyle e^{-s}} \\ (x^2+3x+2)\cdot U_1(x) & \longrightarrow & e^{-s}\left(\dfrac{2}{s^3}+\dfrac{5}{s^2}+\dfrac{6}{s}\right) \end{array}$$

$f(x) = \left(U_\pi(x) - U_{2\pi}(x)\right)\cos x \to -e^{-s\pi}\dfrac{s}{s^2+1} - e^{-2\pi s}\dfrac{s}{s^2+1}$

$$\begin{array}{ccc} \cos(x+\pi) = -\cos x & \longrightarrow & -\dfrac{s}{s^2+1} \\ {\scriptstyle x \to x+\pi} \big\uparrow {\scriptstyle \div U_\pi(x)} & & \big\downarrow {\scriptstyle e^{-s\pi}} \\ U_\pi(x)\cos x & \longrightarrow & \boxed{} \end{array}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل: $f(x) = \left(U_0(x) - U_{\frac{\pi}{2}}(x)\right) e^x \sin x = U_0(x)\, e^x \sin x - U_{\frac{\pi}{2}}(x)\, e^x \sin x$

$$= \frac{1}{(s-1)^2+1} - e^{\frac{\pi}{2}(1-s)} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}$$

$$\begin{tikzcd}
\sin x \arrow[r] & \frac{1}{s^2+1} \arrow[d, "s\to s-1"] \\
e^x \sin x \arrow[u, "\div e^x"] \arrow[r] & \frac{1}{(s-1)^2+1} \arrow[d, "e^{-s\times 0}"] \\
U_0(x)\, e^x \sin x \arrow[u, "x \to x+0", "\div U_0(x)"'] \arrow[r] & \frac{1}{(s-1)^2+1}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\underbrace{e^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}_{\cos x} \arrow[r, "L"] & e^{\frac{\pi}{2}} \frac{s}{s^2+1} \arrow[d, "s\to s-1"] \\
e^{\frac{\pi}{2}}\left(e^x \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right) = e^{\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \arrow[u, "\div e^x"] \arrow[r] & e^{\frac{\pi}{2}} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1} \arrow[d, "e^{-\frac{\pi}{2}s}"] \\
U_{\frac{\pi}{2}}(x)\, e^x \sin x \arrow[u, "x \to x+\frac{\pi}{2}", "\div U_{\frac{\pi}{2}}(x)"'] \arrow[r] & e^{\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-\frac{\pi}{2}s} \frac{(s-1)}{(s-1)^2+1}
\end{tikzcd}$$

تمرین :

$f(x)=e^{-2x}(\cos x-\sin x)$

$$F(s)=\frac{e^{-sx}}{s^2+4s+20}$$

$f(x)=(\sin x-\cos x)U_{\pi}(x)$

$f(x)=x^2\cosh x$

$$F(s)=\frac{s}{s^2-2s+2}$$

$f(x)=x^3\sinh x$

قضیه شماره ۵ : مشتق گیری و انتگرال گیری از تبدیل لاپلاس

روش مشتق گیری :

$$\begin{array}{ccc} f(x) & \longrightarrow & F(s) \\ \Big\downarrow \times(-1)^n x^n & & \Big\downarrow \dfrac{d^n}{ds^n} \\ (-1)^n x^n f(x) & \longrightarrow & \dfrac{d^n F(s)}{ds^n} \end{array}$$

مثال :

$f(x)=x^2\sin x \Rightarrow L[x^2\sin x]$

$$\begin{array}{ccc} \sin x & \longrightarrow & \dfrac{1}{s^2+1} \\ \Big\downarrow (-1)^2 x^2 & & \Big\downarrow \dfrac{d^2}{ds^2} \\ x^2\sin x & \longrightarrow & \dfrac{d^2}{ds^2}\left(\dfrac{1}{s^2+1}\right)=\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{-2s}{(s^2+1)^2}\right) \end{array}$$

$$=\frac{-2(s^2+1)^2+2s[2(2s)(s^2+1)]}{(s^2+1)^4}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

مثال: $L^{-1}\left[\ln \frac{S}{S+1}\right] = \frac{-1}{x} + \frac{e^{-x}}{x}$

$$-\frac{1}{x}(1-e^{-x})$$

$$\begin{tikzcd}
\frac{-1}{x}(1-e^{-x}) & & \ln\frac{S}{S+1} = \ln S - \ln(S+1) \arrow[ll, "L^{-1}"'] \arrow[d, "d/ds"] \\
1-e^{-x} \arrow[u, "\div(-1)x"] & & \frac{1}{S} - \frac{1}{S+1} \arrow[ll, "L^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

مثال: $L^{-1}\left[\ln \sqrt{\frac{S}{S+1}}\right] = \frac{-1}{2x} + \frac{e^{-x}}{2x}$ مثل تمرین قبلی است ولی جوابش در $\frac{1}{2}$ ضرب می‌شود

روش انتگرال گیری :

$$\begin{tikzcd}
f(x) \arrow[r] \arrow[d, "\div x"'] & F(s) \arrow[d, "\int_s^{+\infty}"] \\
\frac{f(x)}{x} \arrow[r, "L"] & \int_s^{\infty} F(u)\,du
\end{tikzcd}$$

(به شرط $\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} < \infty$)

Subject:

Year. Month. Date. ( )

حل : $L\left[f(x)\right] = \left[\frac{\sin x}{x}\right] = \frac{\pi}{2} - tg^{-1} s$

$$
\begin{tikzcd}
\sin x \arrow[r] & \frac{1}{s^2+1} \arrow[d] \\
\frac{\sin x}{x} \arrow[u, "\times x"] \arrow[r] & \int_s^{+\infty} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{\pi}{2} - tg^{-1} s
\end{tikzcd}
$$

$$\int_s^{\infty} \frac{1}{1+u^2}\,du = \lim_{b \to \infty}\left[tg^{-1} u\right]_s^b = \lim_{b \to \infty}\left(tg^{-1} b - tg^{-1} s\right) = \frac{\pi}{2} - tg^{-1} s$$

حل : $L\left[\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\right]$

$$
\begin{tikzcd}
e^{-ax} - e^{-bx} \arrow[r] & \frac{1}{s+a} - \frac{1}{s+b} \arrow[d] \\
\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \arrow[u, "\times x"] \arrow[r] & \int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right)du = Ln\left|\frac{s+b}{s+a}\right|
\end{tikzcd}
$$

$$\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{u+a} - \frac{1}{u+b}\right)du = \lim\Big[\underbrace{Ln|u+a| - Ln|u+b|}_{Ln\left|\frac{u+a}{u+b}\right|}\Big]_s^c$$

$$= \lim_{c \to \infty}\left(\overbrace{Ln\left|\frac{c+a}{c+b}\right|}^{Ln 1 = 0} - Ln\left|\frac{s+a}{s+b}\right|\right) = -Ln\left|\frac{s+a}{s+b}\right|$$

تمرین : $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$

$$L\left[\frac{\sin x}{x}\right] = \int_0^\infty e^{-sx} \frac{\sin x}{x}\, dx \xrightarrow{(s=0)} \frac{\pi}{2} - tg^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x \longrightarrow \frac{1}{s^2+1}$$

$$\frac{\sin x}{x} \longrightarrow \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\, du = \frac{\pi}{2} - tg^{-1} s$$

تمرین : $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x}\, dx$ و $\int_0^\infty x e^{-2x} \sin x\, dx$ و $\int_0^\infty x e^{-2x} \cos x\, dx$

حل معادلات دیفرانسیل به کمک تبدیل لاپلاس :

$$L[y'] = sL[y] - y(0)$$

$$L[y''] = s^2 L[y] - s y(0) - y'(0)$$

$$L[y'''] = s^3 L[y] - s^2 y(0) - s y'(0) - y''(0)$$

$$\triangle\!\!! \quad \sin p \cos q = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q) - \sin(p-q)\right]$$

ضرب کانولوشن: Convolution
(پیچش)

$$\cancel{L[f(x)\cdot g(x)] = L[f(x)]\cdot L[g(x)]}$$

$$(f \times g)(x) = \int_0^\infty f(x-u)\,g(u)\,du = \int_0^\infty g(x-u)\,f(u)\,du = (g * f)(x)$$

خاصیت جابجایی دارد

قضیه: فرض می‌کنیم $L[f(x)] = F(s)$ و $L[g(x)] = G(s)$ ، در این صورت:

$$L[(f \times g)(x)] = \underbrace{F(s)}_{L[f(x)]} \cdot \underbrace{G(s)}_{L[g(x)]} = \mathcal{L}[f(x)] \cdot \mathcal{L}[g(x)]$$

مثال: $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)} = \left(\dfrac{s}{s^2+a^2}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{s^2+a^2}\right)$

$L^{-1}\left[\dfrac{s}{s^2+a^2}\right] = \cos ax$ و $L^{-1}\left[\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{b}{s^2+a^2}\right] = \dfrac{1}{b}\sin bx$

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{s^2+b^2}\right] = \cos ax \cdot \frac{1}{b}\sin bx$$

$$\frac{1}{b}(\cos ax \cdot \sin bx) = \frac{1}{b}\int_0^x (\cos(x-u)\sin bu)\,du$$

$$= \frac{1}{b}\cdot\frac{1}{2}\int_0^x \sin(ax-au+bu) - \sin(ax-au-bu)]$$

$$= \frac{1}{2b}\int_0^x \left(\sin[ax+u(b-a)] - \sin[ax-u(a+b)]\right)du$$

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$= \frac{1}{2b}\left[\frac{-1}{b-a}\cos\left[ax+u(b-a)\right] - \frac{1}{a+b}\cos\left[ax-u(a+b)\right]\right]_0^x$$

$$= \frac{1}{2b}\left[\frac{1}{a-b}\cos(ax+xb-ax) - \frac{1}{a+b}\cos(ax-xa-xb) - \frac{1}{a-b}\cos ax + \frac{1}{a+b}\cos ax\right]$$

$$= \frac{1}{2b}\left[\frac{1}{a-b}\cos(bx) - \frac{1}{a+b}\cos(bx) - \frac{1}{a-b}\cos ax + \frac{1}{a+b}\cos ax\right]$$

حل: $L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+4)}\right]$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\cdot\frac{1}{s^2+4}\right] = x * \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\int_0^x (x-u)\sin 2u\,du$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^x x\sin 2u\,du - \int_0^x u\sin 2u\,du\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{-1}{2}x\cos 2u + \frac{1}{2}u\cos 2u + \frac{1}{4}\sin 2u\right]_0^x$$

ادامه حل ...

$$\begin{cases} x = u \Rightarrow dx = du \\ \sin 2x\,dx = dv \Rightarrow v = \frac{-1}{2}\cos 2x \end{cases}$$

$$\int x\sin 2x\,dx = \frac{-1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{-1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x$$

تمرین:

$$F(s) = \frac{1}{s^2(s-1)^2} \Rightarrow L^{-1}[\quad]$$ با کانولوشن

$$F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

حل انتگرال‌های مجازی به کمک تبدیلات لاپلاس

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx=\frac{\pi}{2} \qquad L\left[\frac{\sin x}{x}\right]\xrightarrow{s=0}=\int_0^\infty e^{-sx}\,\frac{\sin x}{x}\,dx$$

$$L[f(x)]=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)\,dx$$

$$\begin{tikzcd}
\sin x \arrow[r, "L"] & \frac{1}{s^2+1} \arrow[d, "\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}du"] \\
\frac{\sin x}{x} \arrow[u, "\sin x=\frac{f(x)}{x}"] \arrow[r, "L"] & \int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du
\end{tikzcd}$$

$$\int_s^\infty \frac{1}{u^2+1}\,du=\lim_{b\to+\infty}\left[\operatorname{arctg} u\right]_s^b$$

$$=\lim_{b\to+\infty}\left(tg^{-1}b-tg^{-1}s\right)=\frac{\pi}{2}-tg^{-1}s \Rightarrow s=0 \Rightarrow \frac{\pi}{2}$$

مثال: $\int_0^\infty x e^{-x}\sin 3x\,dx$

$$\begin{tikzcd}
\sin 3x \arrow[r, "L"] & \frac{3}{s^2+3^2} \\
e^{-x}\sin 3x \arrow[u, "\div e^{-x}"] \arrow[r, "L"] & \frac{3}{(s+1)^2+9} \arrow[d, "-\frac{d}{ds}"] \\
x e^{-x}\sin 3x \arrow[u, "\div x"] \arrow[r, "L"] & \frac{3\times 2(s+1)}{\left[(s+1)^2+9\right]^2}=\frac{6}{100}
\end{tikzcd}$$

تمرین: $\int_0^\infty e^{-ax}\frac{\sin bx}{x}\,dx$ و $\int_0^\infty e^{-x}\sin^2 x\,dx$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

تمرین : به کمک تبدیل لاپلاس جواب خصوصی معادلات زیر را بیابید.

1) $y'' - y' - 2y = 4x^2 \qquad y(0)=1 \;,\; y'(0)=1$

2) $y'' + 2y' + 5y = e^{-t} \cdot \sin t \qquad y(0)=0 \;,\; y'(0)=1$

3) $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t} \qquad y(0)=-3 \;,\; y'(0)=5$

4) $y'' + y = t \qquad y(0)=1$ و $y'(0)=-1$

5) $y'' - y = t \qquad y(0)=1 \;,\; y'(0)=-1$

حل:

$y'' + y = x \;;\; y(0)=1$ و $y'(0)=-1$

$$L[y''] + L[y] = L[x] \Rightarrow s^2 L[y] - \overset{-s}{\cancel{s\,y(0)}} - \overset{+1}{\cancel{y'(0)}} + L[y] = L[x]$$

$$L[y](s^2+1) = \frac{1}{s^2} + (s-1) \Rightarrow L[y] = \frac{1}{s^2(s^2+1)} + \frac{s-1}{s^2+1}$$

$$y = \underbrace{L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right]}_{\text{قسمت اول}} + \underbrace{L^{-1}\left[\frac{s-1}{s^2+1}\right]}_{\text{قسمت دوم}}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s^2} + \frac{A_3 s + A_4}{s^2+1} \Rightarrow A_1 s(s^2+1) + A_2(s^2+1) + (A_3 s + A_4)s^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} A_3 = 0 \\ A_4 = -1 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 1 \end{cases}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2(s^2+1)}\right] = 0\, L^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] + L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] + L^{-1}\left[\frac{-1}{s^2+1}\right] =$$ قسمت دوم نیز به همین صورت باید حل شود

Subject:
Year. Month. Date. / /

مثال: $L(x) = x\sin x = y$

$$\begin{tikzcd}
-\sin x \arrow[r] & \frac{-1}{s^2+1} \arrow[d, "\frac{d}{ds}"] \\
x\sin x \arrow[u, "\div(-1)x"] \arrow[r, "L"] & \frac{2s}{(s^2+1)^2}
\end{tikzcd}$$

$f'(x) = \sin x + x\cos x = y'$

$f''(x) = \cos x + \cos x - x\sin x = y''$

$L[f''(x)] = 2L[\cos x] - L[x\sin x]$

$s^2 L[x\sin x] - s0 - 0 \Rightarrow s^2 L[x\sin x] = \frac{2s}{s^2+1} - L[x\sin x]$

$L[x\sin x](s^2+1) = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$

مثال: به کمک تبدیل لاپلاس معادله دیفرانسیل را حل کنید.

$y'' - 2y' + y = xe^{x}$; $y(0)=1$ و $y'(0)=0$

$L[y''] - 2L[y'] + L[y] = L[xe^{x}]$

$s^2 L[y] - s\times 1 - 0 - 2[sL[y] - 1] + L[y] = \frac{1}{(s-1)^2}$

$L[y](\underbrace{s^2-2s+1}_{(s-1)^2}) = \frac{1}{(s-1)^2} + \underbrace{s-2}_{(s-1)-1}$

$$L[y]=\frac{1}{(s-1)^4}+\frac{1}{(s-1)}-\frac{1}{(s-1)^2} \qquad y=L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right]+L^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right]-L^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^4}\right]$$

$$y=\frac{1}{3!}x^3e^x+e^x-xe^x$$ جواب عمومی معادله

$$\begin{tikzcd}
x \arrow[d] & \frac{1}{s^2} \arrow[l] \arrow[d, shift left, "s\to s-1"'] \\
xe^x \arrow[r] & \frac{1}{(s-1)^2} \arrow[u, shift left, "s\to s+1"']
\end{tikzcd}$$

تمرین: تبدیل لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$f(x)=x\cos x$ و $f(x)=x^2e^{-x}$ و $f(x)=\int_0^x t\sin t\,dt$

$f(x)=x^2\sin x$ و $f(x)=\int_0^x t^2xe^{4t}\,dt$ و $f(x)=\int_0^x u_{\frac{\pi}{2}}(t)\sin t\,dt$

تمرین: تبدیل معکوس لاپلاس توابع زیر را بدست آورید.

$F(s)=\frac{1}{s(s-1)(s-3)}$ و $F(s)=\frac{3s+2}{s^4(s-5)}$ و $F(s)=\frac{1}{s^2(s^2-1)}$

تمرین: معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} y''-y'-6y=0 \\ y(0)=1,\ y'(0)=2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+9y=\sin 3x \\ y(0)=1,\ y'(0)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y''-y'-2y=3 \\ y(0)=y'(0)=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y''+3y'+2y=u_0x-u_1x \\ y(0)=1,\ y'(0)=2 \end{cases}$$

Subject:
Year. Month. Date. ( )

حل معادله دیفرانسیل به کمک سری های توانی:

$$\sum_{i=0+1}^{\infty} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots = S$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}(a_0 + a_1 + \dots + a_n) = S$$

$$\sum_{n=0} (-1)^n = 1-1+1-1+1-1+\dots \left[\begin{array}{l}\to 1\\ \to 0\end{array}\right. \Rightarrow$$ واگرا

سری هندسی:

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$$

سری_P:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^P}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$$

سری های توانی (مهم):

$$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{\text{سری حول } x=0} \quad \text{یا} \quad \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n}_{\text{سری حول } x=x_0}$$

سری مطلق همگرا:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Rightarrow \text{همگرا} \ \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

همگرای مشروط

$\leftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n$ همگرا نباشد.

Subject:

Year. Month. Date. ( )

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \dots$$

ضرایب آن جمله‌هایی که توان یکسان دارند با هم جمع می‌شوند $(2x^5 + 4x^7 - x^2 + x + 1) + (3x^6 + 2x^5 - x^7 + x^3 + 2x - 7)$

$$\begin{cases} y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots \\ y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \\ y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} \end{cases}$$

اشکال دارد $\sum_{b-0}^{a-0} P_{x+0}$ یا $\sum_{n+0}^{a+0} P_{x-0}$ ⚠

حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با ضرایب متغیر:

فرم کلی : $P(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = g(x)$

⚠ حل در نقاط عادی

حل در نقاط غیر عادی

⚠ نقطه x_0 را یک نقطه عادی (ordinary) معادله دیفرانسیل فوق گویند هرگاه $P(x_0) \neq 0$

در غیر این صورت x_0 را غیر عادی می‌نامند.

⚠ غیر عادی: منظم / غیر منظم

Subject:
Year. Month. Date. ( )

$n+2=2k+1$ فرد $\Rightarrow a_{2k+1}=\dfrac{-1}{(2k+1)2k}\,a_{2k-1}=\dfrac{-1}{(2k+1)2k}\cdot\dfrac{-1}{(2k-1)(2k-2)}\,a_{2k-3}$

$$=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,a_1$$

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+\dots$$

$$y=a_0+a_1x-\frac{1}{2!}a_0x^2-\frac{1}{3!}a_1x^3+\frac{1}{4!}a_0x^4+\frac{1}{5!}a_1x^5+\dots$$

$$=a_0\underbrace{\left(1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\dots\right)}_{\cos x}+a_1\underbrace{\left(x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\dots\right)}_{\sin x}$$

$$\Rightarrow \boxed{y=a_0\cos x+a_1\sin x}$$

معادله

حل: $(1-x^2)y''-2xy'+2y=0 \quad , x=0$ حول

$p(x)=(1-x^2)\Rightarrow p(0)=1\neq 0 \Rightarrow$ نقطه عادی است $x=0$

مثال: مطلوب است تعیین نقاط عادی و غیرعادی معادله دیفرانسیل زیر

$$x^3(1-x^2)y'' + x(1-x)y' + (1+x)y = 0$$

$$P(x) = x^3(1-x^2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$ نقاط غیرعادی ← یعنی اعداد همه نقاط عادی محسوب می‌شوند

مثال: پاسخ معادله دیفرانسیل زیر را به کمک سری توانی حول $x=0$ بیابید.

$$y'' + y = 0$$

$P(x) = 1 \Rightarrow P(0) = 1 \neq 0$ ، $x=0$ یک نقطه عادی معادله است

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{و} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{و} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+2)(n+1) a_{n+2} + a_n\right] x^n = 0$$

$$\Rightarrow a_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} a_n$$

$n+2 = 2k$ اگر $\Rightarrow a_{2k} = \frac{-1}{2k\cdot(2k-1)} a_{2k-2} \times \frac{-1}{(2k-2)(2k-3)} a_{2k-4} = \frac{(-1)^k}{2k!} a_0$